„NEUMANN" matematika verseny 2012.

az általános iskolák 8. osztályos tanulói részére

II. forduló feladatainak megoldása

1. Egy gepárd meglát egy 150 m távolságra lévő antilopot, és azonnal üldözni kezdi, de az antilop rögtön menekülni kezd. A gepárd nagyon gyors, másodpercenként 27 métert, az antilop csak 15 métert képes megtenni. Utoléri-e a gepárd az antilopot, ha csak 15 másodpercig képes ilyen nagy sebességgel futni, utána meg kell állnia, mert elfárad?

első megoldás: az antilop 1 mp alatt 15 métert, x mp alatt 15x métert tesz meg. A gepárd 1 mp alatt 27 métert, x mp alatt 27x métert tesz meg. A gepárd akkor éri utol az antilopot, ha a 27x méteres távolság egyenlő az antilop által megtett 15x méter és a 150 m (az antilop előnye) összegével.

Tehát: $15x + 150 = 27x$.

Az egyenletből $x = 12{,}5$. A gepárd 12,5 mp alatt utoléri az antilopot.

második megoldás: mivel a gepárd 1 mp alatt 27 métert, az antilop pedig csak 15 métert tesz meg, ezért 1 mp alatt a gepárd 12 méterrel közelebb kerül a zsákmányához. A köztük lévő 150 méter távolságot tehát $\frac{150}{12} = 12{,}5$ mp alatt „hozza be". A gepárd tehát 12,5 mp alatt utoléri az antilopot.

A feladat pontszáma: 10 pont

2. Egy pizzériában minden pizzára tesznek paradicsomot és mozzarellát. A vendégnek kell kiválasztania a következők közül egyet, vagy kettőt, amit még kér a pizzájára: sonka, gomba, kukorica, ananász. Azt is eldöntheti, hogy mekkora legyen a pizza mérete: kicsi, közepes vagy nagy. Hányféle pizza rendelhető ebben a pizzériában?

megoldás: egy feltét kiválasztása 4 féleképpen lehetséges. A négy választható feltét közül kettőt kiválasztani pedig 6 féleképpen lehetséges (6 párosítás lehet: sonka-gomba, sonka-kukorica, sonka-ananász, gomba-ananász, gomba-kukorica, kukorica-ananász). Tehát egyet vagy kettőt választani ezek közül 10 féleképpen lehet. Ettől a választástól függetlenül 3 féle mérete lehet a pizzának, tehát az összes lehetőség száma $10 \cdot 3 = 30$.

(természetesen az összes eset felsorolása is jó megoldás)

A feladat pontszáma: 15 pont

3. Egy kocka éleinek hossza 10 cm. Minden lapjának a közepére ráragasztunk egy-egy 5 cm élű kockát, és az így kapott testet lilára festjük. Hány négyzetcentimétert kell befestenünk?

első megoldás:

a kocka felszíne $6 \cdot 100\ cm^2 = 600\ cm^2$.

A kis kockák kitakarnak minden lap közepéből egy-egy négyzetet, de a kis kockák fedőlapjait is lilára festjük, tehát a kocka felszínét kell befestenünk, plusz még minden lapon 4-4 kis kocka oldallapot (kis négyzetet).

Így a 600 cm^2-en kívül még 24 kis négyzetet kell lilára festeni. Ezek területe egyenként 25 cm^2, a 24 kis négyzeté $24 \cdot 25\ cm^2 = 6000\ cm^2$.

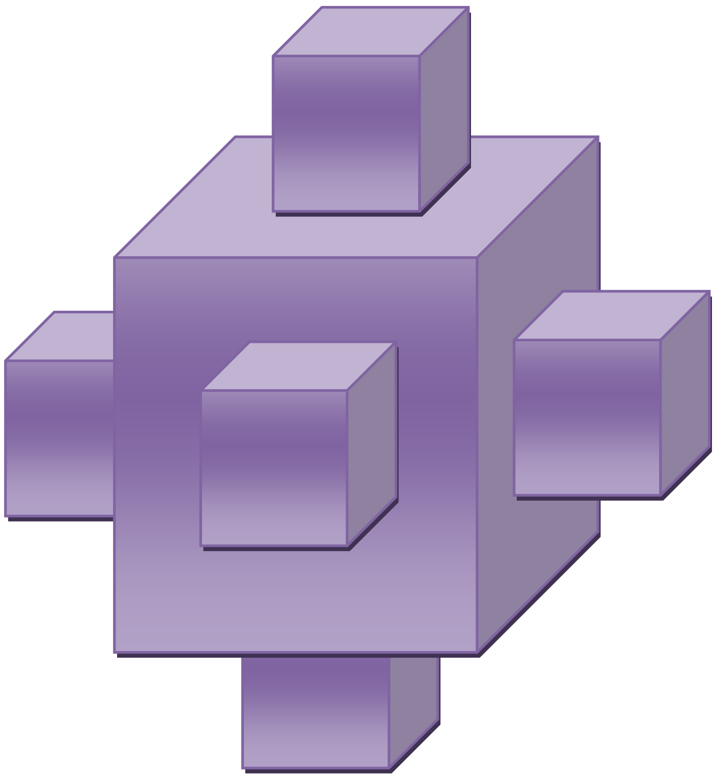
Tehát összesen 1200 cm^2 felületet kell befestenünk lilára.

második megoldás:

a kocka felszíne $6 \cdot 100\ cm^2 = 600\ cm^2$.

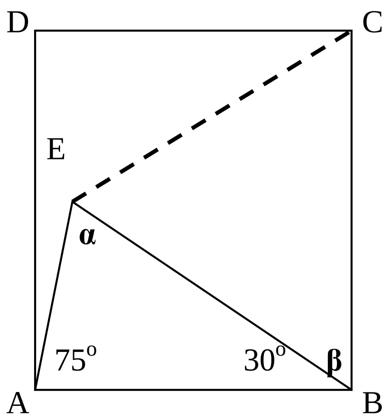
Egy kis kocka felszíne $6 \cdot 25\ cm^2 = 150\ cm^2$. A kis kockák felszíne összesen $6 \cdot 150\ cm^2 = 900\ cm^2$. Mindkét felszínből a takarás miatt le kell vonnunk 6 -6 db kis négyzet területet.

Így $600 + 900 - 12 \cdot 25 = 1500 - 300 = 1200\ cm^2$ felületet kell befestenünk.



A feladat pontszáma: 15 pont

4. Az ABCD négyzetbe az ábrán látható módon egy ABE háromszöget szerkesztettünk, amelynek a négyzetoldalon lévő szögei 75^o és 30^o-osak. Mekkora az EC távolság, ha a négyzet oldala 10 cm?



megoldás:

A háromszög belső szögeinek az összege 180^o, így az ABE háromszögben $\alpha = 180^o - 75^o - 30^o = 75^o$. Az ABE háromszög két szöge tehát egyenlő, ez a háromszög egyenlőszárú háromszög. A két szára EB = AB = 10 cm.
Mivel EB = 10 cm és BC = 10 cm, így az EBC háromszög is egyenlőszárú.
Másrészt a négyzet belső szögei 90^o-osak, tehát a $\beta = 90^o - 30^o = 60^o$.
Az egyenlőszárú EBC háromszög csúcsszöge (szárszöge) 60^o, azaz a háromszög egyenlő oldalú (másik két szöge is 60^o –os). Tehát az EC szakasz hossza 10 cm.

A feladat pontszáma: 20 pont

5. Kata elkezdte leírni az egész számokat 1-től kezdve sorban egymás után. Most már a 2012. számjegyet írja le. Melyik szám leírásánál tart éppen Kata?

megoldás:

Egyjegyű számok : 1 – 9 : 9 db van - ez 9 számjegy leírását jelenti Katának
Kétjegyű számok: 10 – 99 : 90 db van – ez 180 számjegy leírását jelenti
Eddig már 189 számjegyet írt le Kata.
Maradt 2012 – 189 = 1823 db számjegy. A háromjegyű számokat írja már Kata, számonként 3 db számjeggyel, így

1823 : 3 = 607
02
23
2

607 db háromjegyű számot teljesen le tud írni és még marad 2 db számjegye.
Háromjegyű számok: 100 – 706- ig van 607 db szám,
így Kata éppen a 707-et írja le (a 0 leírásánál tart).

A feladat pontszáma: 20 pont

6. Egy 30 fős osztálynak tanév végén matematikából 3,8 lett az átlaga. Egy tanuló sem kapott elégtelent, nyolcan közepest kaptak. Kétszer annyian kaptak négyest, mint ahányan elégségest. Hány tanulónak volt jeles az év végi osztályzata matematikából?

megoldás:

Elégtelen: 0 fő
Elégséges: x fő
Közepes: 8 fő
Jó : 2x fő (a feladat szöveg alapján kétszer annyi, mint ahányan kettest kaptak)
Jeles: 30 – x – 8 – 2x = 22 – 3x (az osztály többi tanulója jelest kapott)

Az átlag 3,8 tehát

$$\frac{0\cdot 1+x\ \cdot 2+8\ \cdot 3+2x\ \cdot 4+(22-3x)\cdot 5}{30}=3{,}8$$

Megoldjuk az egyenletet:

$$0\cdot 1+x\ \cdot 2+8\ \cdot 3+2x\ \cdot 4+(22-3x)\cdot 5=114$$

$$2x+24+8x+110-15x=114$$

$$134-5x=114$$

$$x=4$$

Azaz 4 tanuló kapott kettest, 8 tanuló kapott négyest, és 10 tanuló kapott jelest év végén.

Ellenőrzés:

$$\frac{0\cdot 1+4\ \cdot 2+8\ \cdot 3+8\ \cdot 4+10\cdot 5}{30}=\frac{114}{30}=\ 3{,}8$$

A feladat pontszáma: 20 pont

A feladatsor összpontszáma: 100 pont

Természetesen az ettől eltérő, helyes, indokolt megoldásokat is elfogadtuk.