

Hetedikesek levelező matematikaversenye III. forduló - megoldások

1. Egy mosogatógép 69.990 Ft-ba kerül. Részletfizetési akcióban kifizetjük az ár 20%-át, egy egyszeri 10%-os kezelési költséget – amelyet az eredeti árból számítanak - , majd egy éven át minden hónapban egyenlő 5000 Ft-os részletet. Hány százalékkal fizettük túl a mosogatógép árát?

Megoldás:

A mosogatógép árának 20 %-a $69\,990 \cdot 0,2 = 13\,998$ Ft.

A 10 %-os egyszeri kezelési költség $69\,990 \cdot 0,1 = 6999$ Ft.

Egy éven át minden hónapban 5000 Ft-os részleteink pedig összesen 60 000 Ft-ot jelentenek. Az összes kifizetésünk így $13998 + 6999 + 60000 = 80997$ Ft.

A mosogatógép árának ez $\frac{80997}{69990} \cdot 100 \cong 115,73$ %-a. A mosogatógép árát tehát 15,73 %-kal fizettük túl (16%-ot is elfogadtuk.)

2. Harry Potter Mindenízű Drazsés csomagjában háromféle ízű drazsé van: 14 pirítósízű, 8 csokis és 6 kísértetízű. Legalább hány drazsét kell kivennie a csomagból, hogy biztosan legyen köztük

- a) csokis ízű
- b) pirítósízű
- b) mindhárom ízű drazsé?

Megoldás:

- a) A legrosszabb esetben kiveszi az összes pirítósízűt és kísértetízűt (14+6), tehát 20 db-ot, és csak ezután talál csokis ízűt. Tehát a 21. csokoládé kihúzása után már biztosan lesz köztük csokis ízű.
- b) Hasonlóan az előzőhöz, a legrosszabb eset az, ha kihúzza az összes csokisat és kísértetízűt, vagyis 14 db-ot, tehát legalább 15 csokoládét kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük pirítósízű.
- c) A legrosszabb esetben kiveszi az összes pirítósízűt és az összes csokisat, és csak ezután talál kísértet ízűt. Tehát a 23. csokoládé kihúzása után már biztosan lesz köztük mindhárom ízűből.

3. Béla, János, István és Péter egy 18 emeletes ház különböző emeletein lakik.

Közülük az egyik orvos, a másik tanár, a harmadik építész, a negyedik fodrász.

Béla István fölött lakik, és Péter alatt.

János az orvos alatt lakik.

Péterhez ötször olyan magasra kell menni, mint a fodrászhoz.

Ha az építész két emelettel magasabbra költözne, akkor éppen az orvos és a tanár között középen lakna; ha azonban fele olyan magasra költözne, mint ahol lakik, akkor az orvos és a fodrász között lakna félúton.

Állapítsuk meg minden lakó foglalkozását és azt, hogy hányadik emeleten lakik!

Megoldás:

Számozzuk meg az állításokat.

1. Közülük az egyik orvos, a másik tanár, a harmadik építész, a negyedik fodrász.
2. Béla István fölött lakik, és Péter alatt.
3. János az orvos alatt lakik.
4. Péterhez ötször olyan magasra kell menni, mint a fodrászhoz.
5. Ha az építész két emelettel magasabbra költözne, akkor éppen az orvos és a tanár között középen lakna; ha azonban fele olyan magasra költözne, mint ahol lakik, akkor az orvos és a fodrász között lakna félúton.

A 2. állítás szerint Béla István fölött lakik, és Péter alatt. Tehát hármójuk közül Péter lakik a legmagasabban. A 3. állítás szerint viszont János az orvos alatt lakik. Tehát nem János lakik a legmagasabban, hiszen ha János Péter fölött lakna, aki a másik két lakó fölött lakik az első mondat alapján, akkor nem lenne igaz a 3. állítás (János nem lakna senki alatt). Vagyis a legmagasabban Péter lakik.

Az 5. állítás szerint a fodrász lakik legalacsonyabb számú emeleten, feljebb lakik az építész, az orvos, majd a tanár. Tehát a legmagasabban a tanár lakik, azaz Péter. Alatta lakik az építész, az orvos és a fodrász. Az építész, ha magasabbra költözne, akkor lakna az orvos és a tanár között középen. A 3. állítás alapján nem János az orvos, tehát Béla vagy István az orvos, alattuk lakik János, a fodrász.

Péter – tanár

Béla – építész vagy orvos

István – orvos vagy építész

János - fodrász

A 4. állítás szerint Péterhez ötször olyan magasra kell menni, mint a fodrászhoz, Péter tehát a 15., a 10. vagy az 5. emeleten lakhat, mivel ezek a számok oszthatók öttel. Az építész pedig páros számú („felezhető”) emeleten lakhat, de nem a másodikon és nem a 14.-en vagy felette, mivel ha ekkor feljebb költözne, akkor a legmagasabban lakna.

Az első esetben (Péter a 15.-en lakik, a fodrász pedig ekkor a 3. emeleten; az építész lakhat a 12., 10., 8., 6. emeleten) az 5. állítás csak akkor lesz igaz, ha az építész a 8. emeleten lakik. Ekkor:

Péter – tanár – 15. emelet

Béla – építész – 8. emelet

István – orvos – 5. emelet

János – fodrász – 3. emelet

A második eset (Péter a 10.-en lakik, a fodrász pedig ekkor a 2. emeleten) a lehetséges esetekkel (az építész a 8., 6. vagy 4. emeleten lakhatna) nem tehető igazzá, hasonlóan a harmadik eset sem (Péter az 5.-en lakik, a fodrász pedig ekkor az 1. emeleten, az építész lakhatna a 4. vagy 2. emeleten) tehető igazzá a lehetséges páros emeletekkel.

Tehát a feladat megoldása:

Péter – tanár – a 15. emeleten lakik
Béla – építész – a 8. emeleten lakik
István – orvos – az 5. emeleten lakik
János – fodrász – a 3. emeleten lakik.

4. Írd fel az 1000-et

- a) nyolc darab nyolcas számjegy segítségével úgy, hogy csak összeadást használj
 - b) nyolc darab ötös számjegy segítségével úgy, hogy csak kivonást és osztást használj
 - c) tíz darab kettes számjegy segítségével úgy, hogy csak összeadást és szorzást használj
- A felírásban természetesen zárójeleket is alkalmazhatsz, ha szükséges!

Megoldás:

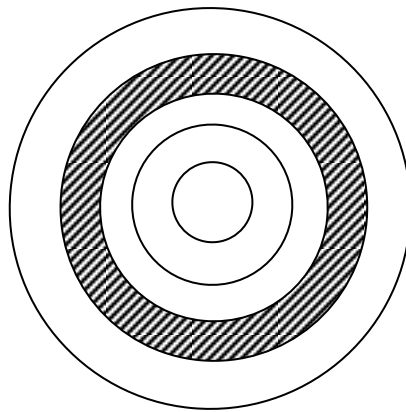
a) $1000 = 888 + 88 + 8 + 8 + 8$

b) $1000 = (5555 - 555) : 5$

c) $1000 = (222 + 22) \cdot 2 \cdot 2 + 22 + 2$

Természetesen más helyes megoldást is elfogadunk.

5. Közös középponttal köröket (koncentrikus köröket) rajzolunk úgy, hogy sugaraik aránya $1 : 2 : 3 : 4 : 5$ legyen. A satírozott körgyűrű területe hány százaléka a legnagyobb kör területének?



Megoldás:

Tekintsük a legkisebb kör sugarát egységnyiinek (egynek). Ekkor a körök területei a legkisebbtől kifelé haladva rendre: $1^2\pi$, $2^2\pi$, $3^2\pi$, $4^2\pi$, $5^2\pi$. A satírozott körgyűrű területét megkapjuk, ha a 4 egység sugarú kör területéből kivonjuk a 3 egység sugarú kör területét. Tehát $T_{\text{körgyűrű}} = 4^2\pi - 3^2\pi = 16\pi - 9\pi = 7\pi$. A körgyűrű területét viszonyítjuk a legnagyobb kör területéhez:

$$\frac{7\pi}{25\pi} = 0,28$$

Tehát a körgyűrű területe a legnagyobb kör területének 28 %-a.