

Hetedikesek levelező matematikaversenye II. forduló

Megoldások

1. Egy kerékpáros minden nap 8 km-rel hosszabb utat tett meg, mint az azt megelőző napon. Ha négy egymást követő napon összesen 360 km utat tett meg, hány kilométert tett meg az utolsó napon?

Megoldás 1.: Jelöljük az első napon megtett út hosszát x -szel. Ekkor a kerékpáros a második napon $x + 8$, a harmadik napon $x + 16$, az utolsó napon $x + 24$ km utat tett meg. Összesen 360 km utat tett meg, tehát

$$x + x + 8 + x + 16 + x + 24 = 360$$

Az egyenlőségből kapjuk, hogy

$$4x + 48 = 360$$

Amből $x = 78$.

A kerékpáros tehát rendre 78, 86, 94, illetve az utolsó napon 102 km utat tett meg. A négy megtett út összege valóban 360 km.

Megoldás 2.: Az egyes napokon megtett utak az első naptól való eltérése, „többlete”, egyszer, kétszer, illetve háromszor 8 km, azaz összesen hatszor 8 km. Ha ezt levonjuk a 360 km-ből, az első nap megtett út négyszeresét kapjuk. Tehát: $360 - 48 = 312$ km, $312 : 4 = 78$ km. Az első napon megtett úthoz háromszor 8 km-t adva kapjuk, hogy az utolsó napon 102 km-t tett meg a kerékpáros.

2. A cserkész táborban két csapatvezető, két táborozóval és egy kutyával át akart jutni a folyón. Csak egy 65 kg teherbíró képességű csónak állt a rendelkezésükre. Szerencsére mindegyikük (a kutyát kivéve) képes volt egyedül is átevezni a csónakkal. Mindegyik csapatvezető megközelítőleg 60 kg-os volt, mindkét táborozó megközelítőleg 30 kg-os és a kutya 12 kg-os. Hogyan tudtak átjutni a folyón? Legalább hányszor kellett a csónakkal átevezni a folyón?

Megoldás:

első átkelés: a két táborozó átkel, az egyik visszajön a csónakkal.

második átkelés: az egyik csapatvezető átevez, a már ott lévő táborozó hozza vissza a csónakot, a csapatvezető a túlparton marad.

harmadik átkelés: a két táborozó átkel, az egyik visszajön a csónakkal.

negyedik átkelés: a másik csapatvezető átevez, a már ott lévő táborozó hozza vissza a csónakot, a két csapatvezető a túlparton marad.

ötödik átkelés: egy táborozó átevez és viszi magával a kutyát is, majd visszajön a csónakkal egyedül. A két csapatvezető és a kutya van a túlparton ekkor.

hatodik átkelés: a két táborozó átkel.

Tehát a folyón 11-szer kellett átevezni a csónakkal. (5 átkelés oda-vissza utat jelent, az utolsó átkelés csak odautat.)

Az átkelések sorrendje részben változhat (más megoldás is lehet, volt olyan tanuló, aki két megoldást is leírt ☺) de a minimális átevezés száma 11 marad.

Ha valaki szereti az ilyen típusú logikai feladatokat, ajánljuk figyelmébe a következő kis programot: http://tablajatekos.hu/uj2001/2003/flash/1atkeles_2.html

3. Tamás bácsi és unokái korának szorzata 2010. Az összes unoka korának összege 12 és semelyik két unoka nem egyidős. Hány unokája van Tamás bácsinak?

Megoldás:

Bontsuk fel a 2010-et prímtényezői szorzatára. $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$

Mivel a 2010 szorzat alakjában Tamás bácsi kora is szerepel, az ő kora 67 év lehet.

Az unokák korának szorzata tehát 30. A $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ szorzatban szereplő 2, 3, 5 év viszont nem lehet az unokák életkora, mivel ekkor az összeg csak 10 lenne.

Így a 30-at más szorzat alakban kell felírnunk: a 30 pozitív osztónak száma 8, az osztók: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

$30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ a számok összege 11

$30 = 1 \cdot 6 \cdot 5$ a számok összege 12

$30 = 1 \cdot 3 \cdot 10$ a számok összege 14

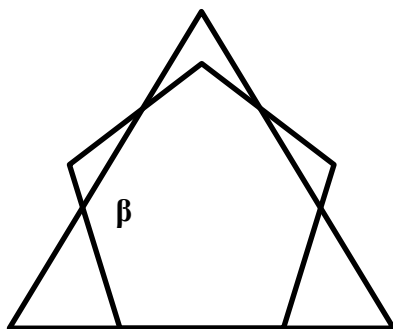
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ a számok összege 10

$30 = 6 \cdot 5$ a számok összege 11

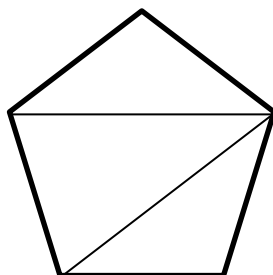
$30 = 3 \cdot 10$ a számok összege 13

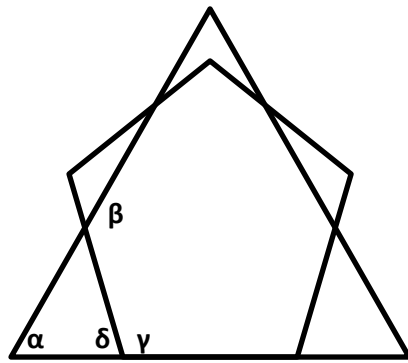
Ha a nagyobb osztókat tekintenénk, az életkorok összege még nagyobb lenne. Tehát a felbontások közül az életkorok összege akkor 12, ha az unokák 1, 5 és 6 évesek. Tamás bácsinak három unokája van.

4. Az ábrán egy szabályos háromszög és egy szabályos ötszög látható. Hány fokos a β -val jelölt szög?



Megoldás: A szabályos háromszög belső szögei 60° -osak. A szabályos ötszög az ábrán látható módon három háromszögre bontható, tehát belső szögeinek összege $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$, egy belső szöge 108° -os. (A szabályos ötszög egy belső szögét az ötszöget a középpontjából öt egyenlőszárú háromszögre bontásával is megkaphatjuk.)





Tehát az ábrán $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 108^\circ$. Másrészt a δ szög a γ mellékszöge (társszöge), tehát $\delta = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. A β szög a kis háromszög külső szöge, vagyis $\beta = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \delta) = \alpha + \delta = 132^\circ$.

A β -val jelölt szög tehát 132° -os.

5. Egy téglatest élei 3 cm, 4 cm és 5 cm hosszúak. A téglatest minden lapját befestjük zöldre, majd a téglatestet lapjaival párhuzamos síkokkal 1 cm^3 -es kiskockákra vágjuk szét. Hány négyzetcentiméter lesz az így keletkező összes kiskockán a festetlen lapok területének összege?

Megoldás 1.: A téglatest térfogata $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3$, a párhuzamos síkokkal való szétvágásnál tehát 60 db kiskocka keletkezik. Ebből:

6 db belső kiskocka minden lapja festetlen

$2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 22$ db kiskockának egy lapja festett, öt lapja festetlen (ezek az eredeti test lapjainak közepén található festett kiskocka lapok)

$4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 24$ db kiskockának két lapja festett, négy lapja festetlen (zeke az eredeti téglatest élei mentén középen helyezkedő kiskocka lapok)

8 db kiskockának három lapja festett, három lapja festetlen (ezek az eredeti téglatest csúcsaiban lévő kiskocka lapok)

Tehát a festetlen lapok száma $6 \cdot 6 + 22 \cdot 5 + 24 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 266$, azaz a festetlen lapok területeinek összege 266 cm^2 . (Egy kiskocka lap területe 1 cm^2 .)

Megoldás 2.: A keletkező 60 db kiskocka összes lapjának területe $60 \cdot 6 = 360 \text{ cm}^2$. A festetlen lapok területének összegét megkapjuk, ha ebből levonjuk a festett lapok területeinek összegét. A festett lapok viszont a téglatest felszínét alkotják, vagyis területeik együtt:

$A = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 20 = 94 \text{ cm}^2$. A festetlen lapok területe tehát $360 - 94 = 266 \text{ cm}^2$.